# Άθροισμα γωνιών πολυγώνου με χρήση δυναμικών λογισμικών Γεωμετρίας

***Πλατάρος Ιωάννης***

*Εκπαιδευτικός Π.Ε.03*

*M.edu. Διδακτικής & Μεθοδολογία των Μαθηματικών*

*plataros@gmail.com*

## Περίληψη

Τα Συστήματα Δυναμικής Γεωμετρίας, μπορούν να παρουσιάσουν με κίνηση, κλασικές στατικές προσεγγίσεις Γεωμετρικών θεμάτων, που δεν έχουν σχέση άμεση με κίνηση (δεν αφορούν λ.χ. γεωμετρικούς τόπους ή γ. μετασχηματισμούς.) Με αυτή την οπτική, οι οριακές θέσεις, οι απειροστικές διαδικασίες που μπαίνουν αναπόφευκτα, υπαγορεύουν νέους γόνιμους τρόπους της ανακαλυπτικής μάθησης και πολλαπλές προσεγγίσεις. Παράλληλα, η προσέγγιση μέσω κίνησης δημιουργεί νέες ατραπούς πρόσβασης στην παραδοσιακή γνώση και στην ίδια την απόδειξη μιας πρότασης, ενώ παράλληλα, μπορεί και να αναδεικνύονται απρόσμενες διασυνδέσεις μεταξύ κλάδων των μαθηματικών, που οδηγούν επίσης σε γόνιμα αποτελέσματα. Στην εργασία εισάγεται τριπλή (τουλάχιστον) καθοδηγούμενη ανακαλυπτική απόδειξη του αθροίσματος των γωνιών ν-γώνου, διευκρινίζεται η έννοια της στροφής σε ένα δρόμο, προσεγγίζεται με διπλό τουλάχιστον εποπτικό τρόπο, ενώ παράλληλα ως επεκτασιμότητα του σεναρίου, υποδεικνύουμε εφαρμογές επί του ιδίου σχήματος σε άλλο θέμα Γεωμετρίας, σε θέμα συνδυαστικής και σε θέμα άλγεβρας με διπλές προσεγγίσεις.

**Λέξεις –κλειδιά:** Sketchpad, Γεωμετρία, στροφή σε γωνία, άθροισμα γωνιών πολυγώνου

## Σύντομη περιγραφή του σεναρίου

Η ιδέα του σεναρίου, διερευνά τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις του γνωστού αποτελέσματος του αθροίσματος των εσωτερικών γωνιών πολυγώνου, $\Sigma = (\neg - 2)\cdot 180^0$, όπως και του αποτελέσματος Σ= $360^0$ για τις εξωτερικές γωνίες, όπως προβλέπεται στο ισχύον ΑΠΣ για την Α΄ Λυκείου και συγκεκριμένα από την §4.8 του σχολικού εγχειριδίου. Το ενδιαφέρον είναι η παρατήρηση αλλαγής ποιοτήτων με οριακές αλλαγές ποσοτήτων, πράγμα που συμβαίνει κατά κανόνα στην διερεύνηση οριακών θέσεων των γεωμετρικών σχημάτων, όχι όμως με τον συνεχή τρόπο της κίνησης που υποστηρίζουν τα δυναμικά εργαλεία Γεωμετρίας. (Πλατάρος, 2015) Ως συγκεκριμένο εδώ παράδειγμα, αναφέρουμε ότι μπορείς να πλησιάζεις ένα σημείο Ο απεριόριστα κοντά σε ένα ευθύγραμμο τμήμα και να ορίζεται πάντα τρίγωνο, που δεν ορίζεται όμως καθώς το Ο τεθεί στον φορέα του ευθυγράμμου τμήματος. (Απειροστή μεταβολή→μεταβολή ποιότητας.) Επίσης, ο τύπος εύρεσης της γωνίας κανονικού

πολυγώνου καθίσταται ειδική περίπτωση. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα λογισμικά Sketchpad, Geogebra, Cabri και οποιοδήποτε άλλο μοιάζει με αυτά (Σιώπη, 2005). Η κύρια ουσία της προσέγγισης, εκτός από το δυναμικό λογισμικό, είναι και το φύλλο εργασίας, στο οποίο καταγράφεται η κλιμακωτή ανακάλυψη, καθοδηγούμενη με κατάλληλες δραστηριότητες, όπου αναδεικνύονται και ενδιαφέρουσες επεκτάσεις ενός φαινομενικά καθαρά Γεωμετρικού θέματος σε αποτελέσματα Άλγεβρας και Συνδυαστικής. Επίσης, η παραστατική επιμονή στο ποία στροφή κάνει ένα όχημα σε στροφή δρόμου, έρχεται να καταδείξει και να άρει μια συνήθη παρανόηση. Επιχειρείται και εφαρμογή του αποτελέσματος για τις εξωτερικές γωνίες πολυγώνου μέσα από την προγραμματιστική λογική της κατασκευής κύκλου στο λογισμικό Χελωνόκοσμος, το οποίο από την σχεδίασή του, κατασκευάζει μόνον ευθύγραμμα τμήματα. (Logo)

## Παιδαγωγικοί-Κοινωνιολογικοί και Πολιτισμικοί στόχοι.

Οι ΤΠΕ γενικώς, έχουν μικρή διείσδυση στην Ελλάδα, σε σχέση με τον Μ.Ο. της Ε.Ε., αφού εμποδίζονται -ανάμεσα στις άλλες αιτίες- «από προγραμματική ευφράδεια μεν, χωρίς ικανοποιητικά αποτελέσματα δε.» (Τσακανίκας, 2015) Η εμπλοκή με τις Πανελλήνιες εξετάσεις, στρεβλώνει -ιδίως στο Λύκειο- τις λογικές των υπερεργαλείων που έχει ο δάσκαλος των μαθηματικών στα χέρια του. (Σκεπτικό: *«Δεν εξετάζομαι με ΤΠΕ, άρα δεν τις μαθαίνω· είναι άχρηστες για τον σκοπό των Πανελληνίων»*) Ανεξαρτήτως αυτού όμως, ως στόχοι παιδαγωγικοί, τίθενται η ενίσχυση της λογικής του συνεργάζεσθαι μεταξύ μαθητών, στην διαφορετική λογική της προσέγγισης της Γεωμετρίας με ΤΠΕ και η ομαδοσυνεργατική διαδικασία, που ενίοτε έως συχνά, έχει καλύτερα αποτελέσματα στους «αδιάφορους» μαθητές. Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές στρίβουν σε μια συνήθη πόλη, κατά κανόνα στρίβουν σε «τετράγωνα» όπου σχεδόν όλες οι γωνίες είναι ορθές. Και ειδικά για τις ορθές, όπου αποτελούν την συντριπτική πλειονότητα γωνιών στις πόλεις, αυτό είναι κατά …τύχη σωστό, αφού ο διαβάτης στρίβει κατά την παραπληρωματική γωνία της γωνίας, όπου ειδικά η παραπληρωματική γωνία της ορθής είναι κι αυτή ορθή. «Λογικό» λοιπόν είναι, να συγχέεται η στροφή σε ένα δρόμο με την γωνία που σχηματίζει ο ίδιος ο δρόμος. Μια άλλη προσέγγιση βιωματική που έχει να κάνει με την πλήρη στροφή ενός οικοδομικού «τετραγώνου», όσο ακανόνιστο κι αν είναι, αφορά, το ότι αφού επανέλθουμε στο ίδιο σημείο, έχουμε κάνει μια πλήρη στροφή $360^0$. Η έννοια αυτή ταυτίζεται και με την ετυμολογική σημασίας της λέξης «περιστροφή». Επίσης πρέπει να γίνει αναφορά και στο ότι οι τρεις (και πλέον) δυναμικές προσεγγίσεις μέσω του ιδίου σχήματος του αποτελέσματος $\Sigma = (\neg - 2)\cdot 180^0$, είναι ενδεικτικές για την διερευνητική ισχύ αυτών των μαθηματικών εργαλείων. (Πλατάρος,2015)

## Διδακτική διαδικασία και Εργαλεία

Η όλη ανάπτυξη θα γίνει στο εργαστήριο πληροφορικής με εργασία καθ΄ομάδες, των δύο ή τριών μαθητών. Μοιράζεται φύλλο εργασίας, όπου μέσω αυτού, γίνεται η όλη προσέγγιση, που περιλαμβάνει παρατήρηση, προβληματισμό, διερεύνηση και όλα

μέσω καθοδηγούμενης ανακάλυψης. Υπάρχουν κατάλληλες δραστηριότητες κλιμακούμενης δυσκολίας για πλήρη κάλυψη του θέματος. Ο Μαθηματικός, δίνει γενικές κατευθύνσεις, οι ομάδες αντιμετωπίζουν διαδοχικά τα θέματα ένα –ένα και ανακοινώνουν μετά έλευση λογικού χρόνου τα αποτελέσματα, τα οποία τίθενται υπό διαπραγμάτευση και επικύρωση στην τάξη (κοινωνικός κονστρουκτιβισμός.) (Κολλινιάτη, 2011, σελ.84-85) . Ο δάσκαλος κάνει χρέη εμψυχωτή περιηγούμενος, τηρώντας τον χρόνο, και την διαδικασία.

**Τεχνολογικά εργαλεία.**

Τα αρχεία που χρησιμοποιούνται είναι του λογισμικού Sketchpad. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν αρχεία και οποιουδήποτε άλλου παρεμφερούς δυναμικού Γεωμετρικού εργαλείου. (Geogebra, Cabri ,EucliDraw). Το επίπεδο γνώσης του λογισμικού δεν χρειάζεται να είναι πάνω από «στοιχειώδες» ήτοι να γνωρίζουν οι μαθητές να εργάζονται στον Η/Υ, να τον έχουν εγκαταστήσει στον προσωπικό του Η/Υ και να έχουν γίνει κάποιες άλλες διδασκαλίες που να επιτρέπουν στον διδάσκοντα να γνωρίζει το πλήθος δεξιοτήτων που χρησιμοποιούνται στα αρχεία αλλά και τον νέο τρόπο εργασίας. Ο δάσκαλος έχει εγκαταστήσει στην επιφάνεια εργασίας κάθε Η/Υ του Εργαστηρίου πληροφορικής φάκελο με τα αρχεία και έχει εκτυπώσει ένα φύλλο εργασίας για κάθε ομάδα. Στο φύλλο εργασίας, περιγράφονται αναλυτικά οι οδηγίες όπου μπορούν να παρέχονται και προφορικά από τον διδάσκοντα. Επίσης είναι εν λειτουργία και ο διαδραστικός ή το προβολικό του Εργαστηρίου για την επικουρική υποστήριξη και διασάφηση τυχόντων θεμάτων

**Φύλλο Εργασίας-Ανάλυση Δραστηριοτήτων**

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Των μαθητών:

α) ……………………………………………………………………………….

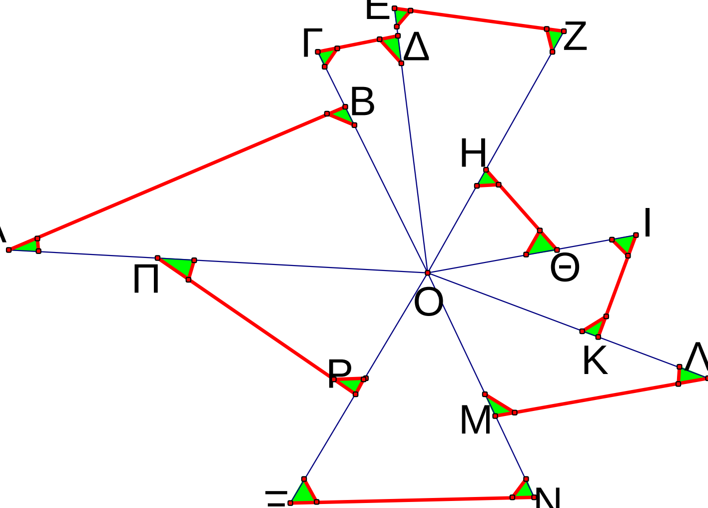
β) ……………………………………………………………………………….

γ)………………………………………………………………………………..

**Δραστηριότητα 1η (Πρόβλημα) Χρόνος 5 λεπτά:**

Ανοίξτε το αρχείο «8 τρίγωνα με κοινή κορυφή» (Sk.4.07) και βρείτε το άθροισμα όλων των σημειωμένων με πράσινη κατάδειξη γωνιών.

*(Υπάρχει το παρακάτω σχήμα)*




**Μπορείτε να υπολογίσετε το άθροισμα όλων των πράσινων γωνιών που είναι προσκείμενες στις κόκκινες βάσεις των διπλανών τριγώνων;**

Απάντηση:…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
……………………………………………………….

**Δραστηριότητα 2$^{η}$ (Συνολικά 15 λεπτά)** :

α)(*2 λεπτά*) Ανοίξτε το αρχείο «πολύγωνο» (Sk.5.00) Θα δείτε ένα κυρτό μη κανονικό πολύγωνο. Μετρήστε τις κορυφές τις πλευρές του, τις σημειωμένες γωνίες του και τα τρίγωνα με κοινή κορυφή το Ο. Έχουμε αριθμητικώς: ….. κορυφές στο πολύγωνο, ……. γωνίες, …….πλευρές και ……τρίγωνα με κοινή κορυφή το Ο.

β)*(3 λεπτά)*Το **άθροισμα Σ όλων (σημειωμένων) των γωνιών** του ……-γώνου, μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: Σ=
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

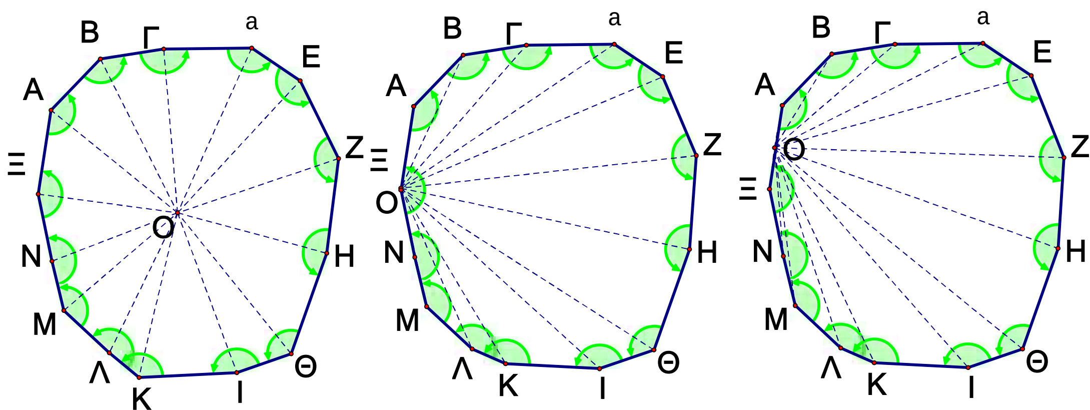
γ) *(4 λεπτά)*Μπορείτε να επεκτείνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε για κάθε ν-γωνο;

Απάντηση: Σ=……………………………………………………………..

δ) *(3 λεπτά)*Επιλέξετε το σημείο Ο και πλησιάστε το προσεκτικά χωρίς να το ταυτίσετε σε μια κορυφή του πολυγώνου. Τα τρίγωνα που είχατε μετρήσει, αλλάζουν σχήμα, αλλά ως συνολικώς αριθμός παραμένουν…… Αν πλησιάσουμε το Ο πάρα πολύ κοντά σε μια κορυφή, πόσα τρίγωνα θα χαθούν αν τελικά ταυτίσουμε το Ο με την κορυφή; Αν είχαμε ν-γωνο, θα χαθούν ……τρίγωνα και συνολικά θα έχω …….τρίγωνα. Αν επιχειρήσω με αυτό το νέο σχήμα να αθροίσω τις πράσινες γωνίες του πολυγώνου, πώς πρέπει να σκεφθώ (αναλογικά όπως και πριν) για θα βρω το άθροισμα των πράσινων γωνιών;

Σ=…………………………………………………………………………………

ε) (*3λεπτά)* Επιχειρείστε να πλησιάσετε το Ο σε μια πλευρά, χωρίς να το ενσωματώσετε στην πλευρά. Πόσα τρίγωνα θα χαθούν αν το Ο ενσωματωθεί σε μια πλευρά; Πώς θα ξαναβρούμε το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό το νέο σχήμα για ν-γωνο; Σ=…………………………………………………………………………………




***Οι τρεις (τουλάχιστον) διαφορετικές προσεγγίσεις για το ίδιο αποτέλεσμα***

**Δραστηριότητα 3η(5 λεπτά) :** Διαπραγματευθείτε τα ερωτήματα α), β) και γ)

α) όταν στρίβετε στην γωνία ενός οικοδομικού τετραγώνου μέσα σε μια πόλη (δηλ. στην «γωνία ενός σπιτιού πόσες μοίρες στρίβετε;

Απάντηση: Στρίβουμε ……μοίρες

β) Η πιο απότομη γωνία σε ένα δρόμο οδικής κυκλοφορίας, πόσες μοίρες νομίζετε ότι είναι;

Απάντηση: Είναι ……μοίρες.

γ) (i)Τι γωνία σχηματίζει ένας αυτοκινητόδρομος δρόμος σε μια *«ανοικτή μικρή στροφή»* και (ii) τι γωνία σε μια *«πολύ κλειστή απότομη στροφή;»*

Απάντηση: (i)………………………………(ii)……………………………….

**Δραστηριότητα 4η( Σύνολο: 12 λεπτά) :**

α)*(5 λεπτά)*Ανοίξτε το αρχείο «κίνηση ρομβοειδούς οχήματος σε τριγωνική πίστα» (Sk.4.07) και πατήστε το κουμπί να γίνει έναρξη της κίνησης. Σκοπός σας είναι να παρατηρήσετε τις γωνίες που διαγράφει το ίδιο το όχημα σε κάθε στροφή και να βρείτε το άθροισμα των τριών αυτών γωνιών με αιτιολόγηση.

Απάντηση: Οι τρεις γωνίες που διαγράφει το όχημα σε κάθε στροφή, είναι ………………γωνίες του κίτρινου τριγώνου και επομένως το άθροισμά τους Σ , μπορούμε να το βρούμε ως εξής:

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………….

β) *(7 λεπτά)*Ανοίξετε το αρχείο «πολύγωνο όμοιο προς εαυτό» Υπάρχουν δύο υπο-αρχεία με «ένα βαθμό ελευθερίας κίνησης» και δύο (κίνηση σε ευθεία και κίνηση σε επίπεδο.) Σε κάθε ένα απ΄ αυτά, υπάρχει ένα τυχαίο πολύγωνο, που είναι κατασκευασμένο με τέτοιο τρόπο, που σε δυναμικό χειρισμό του το σημείο Α να πλησιάζει γραμμικά το Ο και να σμικρύνεται (ή μεγεθύνεται) παραμένοντας όμοιο με τον εαυτό του. Επίσης είναι σχεδιασμένες και όλες οι εξωτερικές του γωνίες. Στο δεύτερο υπο-αρχείο, έχουμε το ίδιο σχήμα, με τις ίδιες ιδιότητες και επί πλέον μπορεί και να περιστρέφεται γύρω από το Ο. (Πάντα με δυναμικό χειρισμό του σημείου Α)

Ζητείται από εσάς:

α) Να παρατηρήσετε αν μεταβάλλονται οι εξωτερικές γωνίες του πολυγώνου καθώς μεγεθύνεται ή σμικρύνεται.

Παρατήρηση: (i) Μεταβάλλονται κατά μέτρο ☐ . (ii) Δεν μεταβάλλονται κατά μέτρο ☐ .

β) Να ελαχιστοποιήσετε σιγά –σιγά την απόσταση του Α από το Ο, έως ότου όλες οι γωνίες τείνουν να αποκτήσουν κοινή κορυφή. Πόσο φαίνεται να είναι το άθροισμά τους;

γ) Συμπληρώστε: Σε κάθε πολύγωνο, το άθροισμα κάθε γωνίας του με την αντίστοιχη εξωτερική της ισούται με ……. μοίρες.

δ) Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το άθροισμα γωνιών πολυγώνου που έχουμε ήδη βρει, να αποδείξετε, ότι το άθροισμα Σ΄, όλων των εξωτερικών γωνιών παντός ν-γώνου είναι ανεξάρτητο του πλήθους των πλευρών του, αφού ισούται με $180^0$.

**Δραστηριότητα για το σπίτι:** Δοκιμάστε με το αρχείο «Πολύγωνο» να βρείτε, πώς και εάν φθάνουμε στον ίδιο τύπο για το άθροισμα των γωνιών πολυγώνου, όταν το Ο βγαίνει **εκτός** του πολυγώνου. Ξεκινάμε με την παρατήρηση, ότι κάθε τυχούσα πλευρά χ του πολυγώνου είναι διαδοχική με δύο άλλες y,z. Αν προεκταθούν οι δύο άλλες, τότε μαζί με την x, ορίζουν ένα τρίγωνο εκτός του πολυγώνου. Επιλέγουμε να θέσουμε το Ο, εκτός του πολυγώνου και εντός ενός έτσι ορισθέντος τριγώνου. Α) Πώς θα αναζητήσουμε τον ευρεθέντα τύπο με αυτό το σχήμα; Β) Πώς αν το Ο συμπέσει με την κορυφή του εξωτερικού τριγώνου; Γ) Μπορείτε να δείτε τι γίνεται όταν το Ο βγει εκτός και αυτού του τριγώνου;

## Εφαρμογή στο Σχολείο

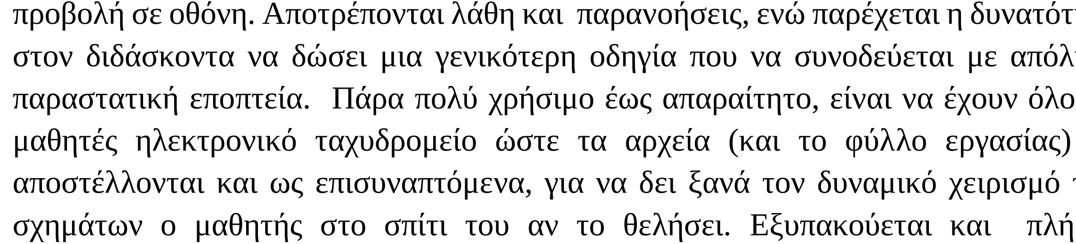
Η εφαρμογή στο Σχολείο, είναι πάντα μια πολύ επικίνδυνη απόπειρα, η οποία πρέπει να γίνει με ελαχιστοποίηση όλων των εκ των προτέρων γνωστών πιθανών παραγόντων αποτυχίας: Να είναι ελεύθερο το εργαστήριο την ημέρα και ώρα που θα το χρειαστείτε. Να λειτουργούν όλοι οι Η/Υ όπως και να έχουν ποντίκι και πληκτρολόγιο εν λειτουργία. Να μην εισάγουν στικάκια οι μαθητές στους Η/Υ (σχεδόν όλα περιέχουν ιούς). Να έχουν ήδη τοποθετηθεί στην επιφάνεια εργασίας τα αρχεία του σεναρίου ανά υπολογιστή. Να γνωρίζουν οι μαθητές οπωσδήποτε το λογισμικό σε «στοιχειώδες» επίπεδο. (Έχουμε καθορίσει ήδη τι εννοούμε ως «στοιχειώδες») Έχει γίνει ο διαχωρισμός των ομάδων, ει δυνατόν και οι θέσεις που θα καθίσουν. Έχει ελεγχθεί ο αριθμός καθισμάτων και η διάταξή τους. Αυτό βεβαίως δεν γίνεται μέσα σε ένα διάλειμμα, αφού δεν θέλει και πολύ η τεχνολογία να διαλύσει ένα μάθημα το οποίο αν

διεξάγεται και πρώτη φορά και αποτύχει, τότε έχουμε γενικότερη ψυχολογική επίδραση και για την συνέχεια. Ωστόσο να ληφθεί υπ΄ όψιν, ότι και επί πιθανής αποτυχίας θα πρέπει να επαναληφθεί οπωσδήποτε το εγχείρημα, απλώς, χωρίς επανάληψη των ιδίων λαθών. Περιορισμός λοιπόν, όλων των φαινομενικά αστάθμητων παραγόντων. Επίσης, βασικό είναι να

1. *Καθώς το Α πλησιάζει το Ο, οι εξωτερικές γωνίες του τείνουν να αποκτήσουν κοινή κορυφή και το ότι το άθροισμά τους καθίσταται $180^0$, καθίσταται εποπτικά εναργές.*

2. *Καθώς το όχημα στρίβει στην οξεία γωνία του δρόμου, η αρχική του κατεύθυνση και η τελική του σχηματίζουν την εξωτερική αμβλεία, της οξείας. Έτσι καθίσταται σαφές και οπτικά το ζητούμενο, με την σχεδίαση του ίχνους της προέκτασης του άξονα κίνησης (ημιευθεία) του οχήματος*

3. *Η εποπτεία του αθροίσματος των 360 μοιρών, με την κίνηση του διαβήτη, καθίσταται πρόδηλη και για κάθε άλλο πολύγωνο.*



υπάρχει και προβολή των αρχείων στον διαδραστικό πίνακα του εργαστηρίου ή προβολή σε οθόνη. Αποτρέπονται λάθη και παρανοήσεις, ενώ παρέχεται η δυνατότητα στον διδάσκοντα να δώσει μια γενικότερη οδηγία που να συνοδεύεται με απόλυτη παραστατική εποπτεία. Πάρα πολύ χρήσιμο έως απαραίτητο, είναι να έχουν όλοι οι μαθητές ηλεκτρονικό ταχυδρομείο ώστε τα αρχεία (και το φύλλο εργασίας) να αποστέλλονται και ως επισυναπτόμενα, για να δει ξανά τον δυναμικό χειρισμό των σχημάτων ο μαθητής στο σπίτι του αν το θελήσει. Εξυπακούεται και πλήρης

συνεργασία μεταξύ καθηγητή Πληροφορικής και Διευθυντή σχολικής μονάδας. (Εκ των ων, ουκ άνευ.) Επίσης, πολλές οικογένειες, ανεξαρτήτως οικονομικής κατάστασης, επιλέγουν να μην έχουν διαδίκτυο σπίτι. Πρέπει να προβλεφθεί να έχουν όλοι τα λογισμικά σπίτι τους, είτε να μπορούν κάποια απ΄ αυτά να εγκατασταθούν σε φορητό τηλέφωνο. (λ.χ. το Geogebra έχει αυτή την δυνατότητα) ώστε να υπάρχει πρόσβαση εύκολη για αναστοχασμό ή και απλή περιέργεια για κάτι. Πολύ χρήσιμο και λειτουργικό είναι τα αρχεία των Φ.Ε. να αναρτώνται στην ιστοσελίδα του Σχολείου. Για το συγκεκριμένο σενάριο προτείνουμε: Συνολικός χρόνος δραστηριοτήτων 37 λεπτά. Υπάρχει και ο χρόνος διαπραγμάτευσης και ανακοινώσεων στην υπόλοιπη τάξη. Τα υπόλοιπα 8 λεπτά πρέπει να είναι «χρόνος ασφαλείας» για την έγκαιρη ολοκλήρωση , πέρα και των 2 λεπτών από το διάλειμμα. Επειδή μπορεί παρ΄ όλα ταύτα να υπάρξει πρόβλημα, πρέπει να μην επιχειρηθεί η παρούσα δραστηριότητα, αν δεν έχουν προηγηθεί αρκετές άλλες και με μαθητές που δεν θα πουν «*μας τρώτε το διάλλειμα*» (Δύσκολο.)

**Επεκτασιμότητα, καινοτομίες, βοηθητικές δραστηριότητες σε φαρέτρα προστιθέμενης αξίας και αξιολόγησης.**

Μια επέκταση του συγκεκριμένου σεναρίου, μπορεί να πάρει έναν απρόσμενο δρόμο και να συνδέσει την Γεωμετρία με την Συνδυαστική και την Άλγεβρα. Αναφερόμαστε στην μέτρηση των διαγωνίων πολυγώνου που μπορεί να γίνει με την προσέγγιση-τελικώς ταύτιση του Ο σε μια κορυφή. (λ.χ. Α) Ο μαθητής πρέπει να απαντήσει το «ν-3 διαγωνίους» (εξαφανίζονται τρία ευθύγραμμα τμήματα που αλλάζουν ποιότητα και γίνονται διαγώνιοι κατά την σύμπτωση του Ο στο Α.) Σε δεύτερο επίπεδο, να δει ότι έχουμε άλλες ν-3 διαγώνιες από το Β, άλλες ν-3 διαγώνιες από το Γ κ.ο.κ. Μετά σε τρίτο επίπεδο να προβληματιστεί πόσες φορές τις έχουμε μετρήσει (διπλά η κάθε μία, αφού για την διαγώνιο από το τυχόν Χ➔Υ έχουμε μετρήσει και την διαγώνιο από το Υ➔Χ και έτσι έχουμε $\neg(\neg-3)$ διπλομετρημένες διαγωνίους τελικά $\frac{\neg(\neg-3)}{2}$ διαφορετικές διαγωνίους. Μπορεί επίσης να γίνει προσέγγιση μέσω «λογικής διαφορετικών διαγωνίων» από το Α: ν-3, από το Β: ν-3, από το Γ: ν-4, από το Δ: ν-5 κ.ο.κ. 4,3,2,1 (μη διπλομετρημένων) και να ανακαλυφθεί καθοδηγούμενα ο τύπος με την αντίστροφη λογική, $1+2+3+4+5+....+(\neg-2)+(\neg-3)+[\neg-3]=\frac{\neg(\neg-3)}{2}$

Μια άλλη ανάλογη προσέγγιση είναι με το γνωστό πρόβλημα των διαφορετικών χειραψιών που μπορούν να δώσουν ν στο πλήθος άνθρωποι, όπου αναλογικά όπως και πιο πάνω, μετρούν πλέον οι συνδέσεις όλων των σημείων (πλευρές και διαγώνιοι) και ανακαλύπτεται πάλι με διπλή προσέγγιση ο γνωστός τύπος

$1+2+3+4+5+....+(\neg-2)+(\neg-1)=\frac{\neg(\neg-1)}{2}$ (Προσοχή, η ανακάλυψη, δεν συνιστά και απόδειξη)

Μια εποπτική προσέγγιση για το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών πολυγώνου είναι και η εξής: Ο καθηγητής σχεδιάζει στον πίνακα ένα τυχαίο πολύγωνο. Τοποθετεί μέσα του λ.χ. τον κλειστό διαβήτη και καλεί τους μαθητές να φανταστούν έναν άνθρωπο να κάνει τον γύρο του πολυγώνου: «Στην αρχή θα περπατήσει κατά μήκος της ΑΒ (βάζει παράλληλα τον διαβήτη με την ΑΒ) μετά θα βαδίσει παράλληλα με την ΒΓ, στρίβοντας τόσο (δείχνει την στροφή με τον διαβήτη κολλημένο στον πίνακα που παίρνει θέση παράλληλη με το ΒΓ ) κ.ο.κ.  έως ότου επανέλθει στο ΑΒ, έχοντας κάνει συνολικά μια πλήρη περιστροφή, ήτοι $360^0$.

Επίσης μια πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα του αθροίσματος των εξωτερικών γωνιών πολυγώνου, είναι η εφαρμογή της στην υλοποίηση κατασκευής κύκλου με το λογισμικό  Χελωνόκοσμος (Logo). Αφού η χελώνα κινείται μόνο σε ευθύγραμμο τμήμα, η κατασκευή κύκλου θεωρητικά είναι αδύνατη, πλην λ.χ. η εντολή «επανάλαβε 360[μ 1 δ 1] (=πήγαινε μπροστά μια μονάδα και στρίψε 1 μοίρα και όλο αυτό κάντο 360 φορές) δίνει ένα κανονικό 360-γωνο, με 360 στο πλήθος εξωτερικές γωνίες μιας μοίρας που δίνει την οπτική εντύπωση κύκλου .

Η όποια αξιολόγηση του παρόντος σεναρίου, έχει να κάνει όχι με τους διατυπωμένους ρητώς γενικούς στόχους του ΑΠΣ, αλλά με την δυνητική διαφορά του ποσοστού που τα καταφέρνει καλύτερα, σε σχέση με μια παραδοσιακή μετωπική προσέγγιση. Το πρώτο «μείον», για να ξεκινήσουμε με τα αρνητικά, είναι ο χρόνος διαπραγμάτευσης της διδακτέας ύλης. Πρόκειται για δύο μόνο παραγράφους από το Σχολικό εγχειρίδιο, που μπορούν να καλυφθούν μετωπικά σε 10΄ λεπτά ακριβώς. Τα 45΄ με τις ΤΠΕ σίγουρα  δεν επαρκούν αν δεν γίνει πλήρης προετοιμασία μέχρι κεραίας. Πραγματικά, ο μέγιστος εχθρός ενός διδακτικού σεναρίου, γενικότερα μιας διδασκαλίας,  είναι η επάρκεια του χρόνου. Άρα ο διδάσκων, πρέπει να  έχει πλήρη εποπτεία του χρόνου και αν για κάποιο λόγο διαπιστώσει  ότι μένει πίσω χρονικά, περιορίζει κατά 1΄την 3η Δραστηριότητα και κατά 2΄την επόμενη, θεωρώντας πάντα ότι τα 37΄ του προϋπολογισμού, είναι ουσιαστικά 45΄για πάν ενδεχόμενον. Επίσης η απόδειξη της πρότασης για τις εξωτερικές γωνίες πολυγώνου είναι εκτός διδακτέας ύλης για το 2015-6, (Εγκύκλιος ΥΠ.Π.Ε.Θ., 2016)   έτσι, η τελευταία δ) υποδραστηριότητα της 4ης, μπορεί να παραληφθεί και να εξοικονομηθεί χρόνος. Όμως, η ποιότητα προσέγγισης που προσφέρεται  μέσω του δυναμικού Εκπαιδευτικού  λογισμικού, έχει να κάνει: α) Με την εποπτική ποιότητα-παραστατικότητα της παρουσίασης της στροφής σε γωνία. β)  Με την εποπτική ποιότητα του αναλλοίωτου των εξωτερικών γωνιών, ανεξαρτήτως μεγέθους του πολυγώνου και πώς με απειροστικό τρόπο  οι εξωτερικές γωνίες, καθίστανται -εκφυλίζοντας το πολύγωνο σε σημείο- με κοινή κορυφή αναδεικνύοντας την αλήθεια της πρότασης. δ) Η επικουρική προσέγγιση της «ημιδυναμικής» παρουσίασης στον πίνακα με την στροφή του διαβήτη. ε) Με την τριπλή (τουλάχιστον) προσέγγιση  μέσω του ιδίου σχήματος για το ίδιο αποτέλεσμα, το οποίο συνιστά και ένα «εύρημα» του παρόντος σεναρίου. Η απειροστική μεταβολή του αριθμού των τριγώνων στις τρεις οριακές θέσεις συνιστά ίσως έναν ειδικό «τρόπο σκέψης» στην Γεωμετρία αφού  καθώς όπως λέγεται (δεν υπάρχει βιβλιογραφική αναφορά για το επόμενο) την  πρόσδοση κίνησης σε γεωμετρικά αντικείμενα, έδιναν με την βοήθεια

της ισχυρής φαντασίας τους και μεγάλοι Γεωμέτρες του μαυροπίνακα πολύ πριν εφευρεθούν τα δυναμικά εργαλεία. (γ. τ., οριακές περιπτώσεις , ιδίως σε διερευνήσεις) στ) Με την διασύνδεση του ιδίου σχήματος για μέτρηση διαγωνίων, που καταλήγει στον υπολογισμό αλγεβρικού αθροίσματος ή και με την θεώρηση του προβλήματος των χειραψιών ν ανθρώπων ανά δύο, που επίσης οδηγεί σε υπολογισμό του τύπου αθροίσματος των ν-1 πρώτων φυσικών. Φυσικά, είναι ανοικτό πάντα το ενδεχόμενο, ότι δοκιμή στην πράξη, είναι δυνατόν να φέρει αναδράσεις με τροποποιήσεις του Φ.Ε. ή και της ίδιας της δραστηριότητας. Τέλος: Θεωρούμε ότι η διασύνδεση που γίνεται με άλλους κλάδους των μαθηματικών είναι εξαιρετικά γόνιμη, καθώς εισάγει θεωρήσεις μετάβασης από τον Γεωμετρικό στον Συνδυαστικό και Αλγεβρικό τρόπο σκέψης και αντιστρόφως, με ένα και μόνο σχήμα, πράγμα χρήσιμο για την ολιστική αντιμετώπιση των Μαθηματικών, όχι μόνο φιλοσοφικά είτε επιστημολογικά, αλλά ως τρόπο -μέθοδο εναλλακτικής θεώρησης- προσέγγισης πραγματικών προβλημάτων και ασκήσεων.

**Διαδικτυακές αναφορές**

Αργυρόπουλος Η. Βλάμος Π. Κατσούλης Γ. Μαρκάτης Σ. Σίδερης Π., *Ευκλείδεια Γεωμετρία, Κεφάλαιο 4$^{o}$ , § 4 και §8* (Ανακτήθηκε 25/6/2016 από http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-A101/574/3720,16300/ )

Πλατάρος Ι. (2015). *Άθροισμα γωνιών πολυγώνου -Αρχείο Geogebra.* (Ανακτήθηκε 25/6/2016 από https://www.geogebra.org/m/KVWNHv2x )

Εγκύκλιος ΥΠ.Π.Ε.Θ (2016) *Διδακτέα ύλη Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου*: *Υπ΄αρ. πρωτ. 159253/Δ2/9-10-2015*

Σιώπη Κ. (2005). *Η Απόδειξη σε περιβάλλον δυναμικής Γεωμετρίας.* Αθήνα, Μεταπτυχιακή εργασία ΕΚΠΑ (Ανακτήθηκε 25/6/2016 από www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_siopi.pdf )

Τσακανίκας Ά. (2015). *Υιοθέτηση των ΤΠΕ και ψηφιακή ανάπτυξη στην Ελλάδα.* Παρουσίαση ομότιτλης έρευνας. Αθήνα, ΙΟΒΕ Ανακτήθηκε από http://iobe.gr/docs/research/RES_03_10062015_PRE_GR.pdf

Κολλινιάτη Γ. (2011). *Ο Κονστρουκτιβισμός ως θεωρία της Διδακτικής των Μαθηματικών σε αντίθεση με το μαθηματικό ρεαλισμό (Πλατωνισμό.)* Μεταπτυχιακή εργασία. ΕΚΠΑ (Ανακτήθηκε 25/6/2016 από www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Kolliniati%20Georgia.pdf )

Πλατάρος Ι. (2016). *Ο νέος τρόπος διδασκαλίας της Γεωμετρίας, και τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά.* Πρακτικά 3$^{ου}$ Συνεδρίου Νέος Παιδαγωγός. (σελ. 2.669) Ανάκτηση:(https://www.dropbox.com/sh/1puon1t3mabvwzj/AACtRZrQ8XgKXg3EYyIFGIyja/Praktika_Synedriou_03_Synedrio_Neos_Paidagogos_2016.pdf?dl=0 )